

Absolute Extrempunkte und Randextrempunkte

Beispiel:

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie den Globalverlauf von G_f , die Koordinaten der Schnittpunkte mit der x -Achse, die Koordinaten und die Art der Extrempunkte sowie die Koordinaten der Wendepunkte. Geben Sie die Wertemenge an und zeichnen Sie G_f im Bereich $-4,5 \leq x \leq 2$.

Globalverlauf:

$$x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow \infty: f(x) \rightarrow +\infty$$

Nullstellen:

$$\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{8}x^3(x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -4$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

$$\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -3$$

Skizze von f' :

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ kein Extrempunkt} \quad x_2 = -3 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(-3/-3,375)$$

Wendepunkte:

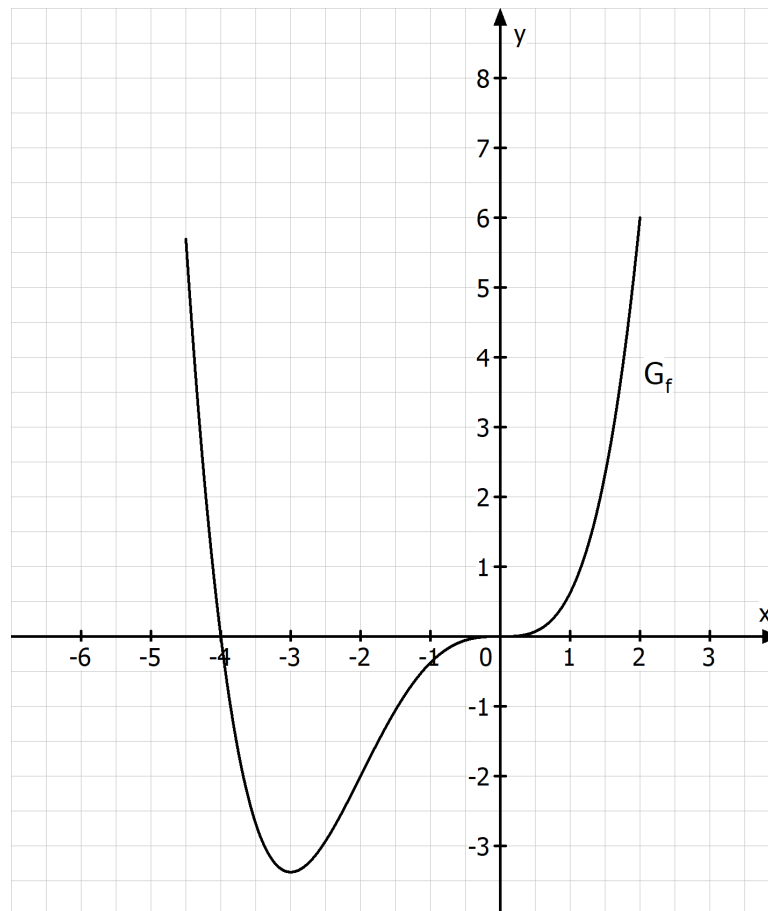
$$f''(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x$$

$$\frac{3}{2}x^2 + 3x = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -2$$

Skizze von f'' :

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ TEP} \quad \text{TEP}(0/0) \quad x_2 = -2 \text{ WP} \quad \text{WP}(-2/-2)$$

$$\text{Wertemenge: } W = [-3,375; \infty[$$



Der Punkt $P(x_T / f(x_T))$ auf dem Graphen einer Funktion f heißt absoluter Tiefpunkt von G_f , wenn für alle $x \in D_f$ gilt: $f(x_T) \leq f(x)$

Der Punkt $P(x_H / f(x_H))$ auf dem Graphen einer Funktion f heißt absoluter Hochpunkt von G_f , wenn für alle $x \in D_f$ gilt: $f(x_H) \geq f(x)$

Betrachtet wird nun die Funktion f mit $D_f = [-4,5; 2]$.

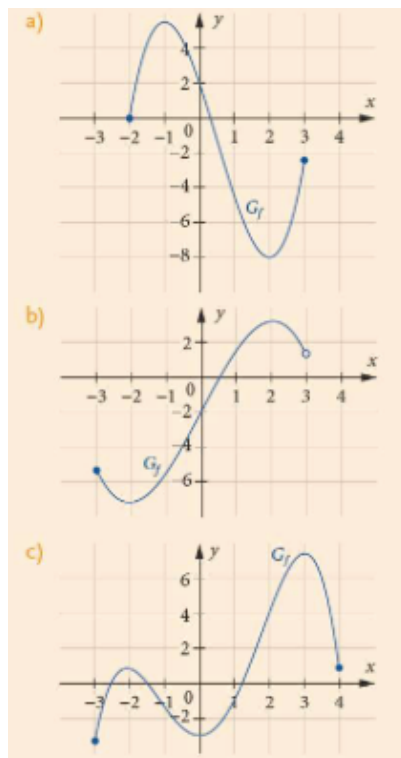
Wir erkennen an der obigen Zeichnung, dass der Graph G_f am linken Rand fällt und am rechten Rand steigt. Daher gibt es zwei Hochpunkte $H_1(-4,5/5,69)$ und $H_2(2/6)$.

Die Extrempunkte an den Rändern der Definitionsmenge heißen Randextrempunkte.

Ist die Definitionsmenge einer ganzrationalen Funktion f auf ein abgeschlossenes Intervall eingeschränkt, so treten an den Rändern a und b Randextrempunkte des Graphen von f auf.

Aufgaben:

- 1 Entnehmen Sie dem Graphen G_f die Koordinaten aller Extrempunkte näherungsweise. Geben Sie jeweils an, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt, einen lokalen oder absoluten Extrempunkt oder einen Randextrempunkt handelt (ohne Hilfsmittel). ○



- 2.0 Entscheiden Sie, welche Aussagen über den Graphen G_f der Funktion f wahr sind (ohne Hilfsmittel).

- 2.1 Der Graph von f mit $f(x) = x^2 - 6x + 5$ und Definitionsmenge $D_f = [1; 5]$ hat die Wertemenge $W_f = [-4; 0]$ und bei $x = 3$ einen absoluten Tiefpunkt. ○

- 2.2 Der Graph von f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x + 2$ und Definitionsmenge $D_f = [-3; 5]$ ist streng monoton steigend und hat zwei Randextrempunkte. ⊗

- 2.3 Der Graph von f mit $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ und $D_f = \mathbb{R}$ ist symmetrisch zur y -Achse, hat zwei absolute Extrempunkte und die Wertemenge $W_f = [1; \infty[$. ⊗

- 2.4 Der Graph von f mit der Definitionsmenge $D_f = [0; 4]$ und Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = -3x^2 + 12x$ hat einen Wendepunkt bei $x = 2$, den absoluten Tiefpunkt bei $x = 0$ und den absoluten Hochpunkt bei $x = 4$. ⊗

3.0 Im Folgenden wird die Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$ und der im Vergleich zu D_f eingeschränkten Definitionsmenge $D_g = [-4, 5; 1]$ betrachtet. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet. (Abitur 2019 AI)

3.1 Ermitteln Sie die Wertemenge W_g der Funktion g . Bestimmen Sie dazu die Koordinaten sämtlicher Extrempunkte. 

3.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion g . 

3.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_g in ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem. Ermitteln Sie dazu die Nullstellen der Funktion g . Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. 

4.0 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 20x^2 + 64)$ mit der Definitionsmenge

$D_f = [-3; 4, 5]$ sowie die lineare Funktion $g: y = \frac{15}{4}$ mit der Definitionsmenge

$D_g = \mathbb{R}$. Die Graphen der Funktionen f und g in einem kartesischen Koordinatensystem werden mit G_f bzw. G_g bezeichnet. (Abitur 2021 AII)

4.1 Geben Sie an, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

„Der Graph der Funktion f ist auf D_f achsensymmetrisch zur y -Achse.“ 

4.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f . 

4.3 Bestimmen Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte von f und geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an. 

4.4 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f und die Gerade G_g in ein kartesisches Koordinatensystem. 
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm

5.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_g = [-3; 3]$.

Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

(Abitur 2023 Teil 1)

5.1 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion g auf Symmetrie zum Koordinatensystem. ☐

5.2 Ermitteln Sie alle Extremstellen der Funktion g . ☒

6.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion g dritten Grades mit

$$g(x) = -0,025(x^3 - 12x^2 + 36x - 80) \text{ und der Definitionsmenge } D_g = [0; 7].$$

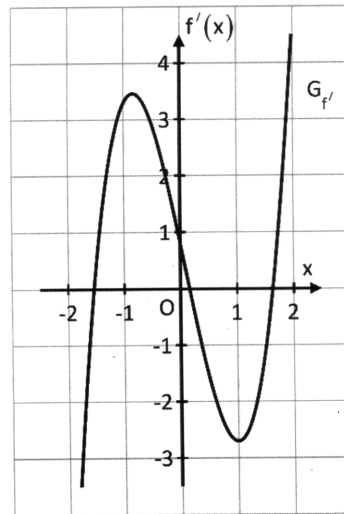
Der Graph von g in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

(Abitur 2023 All)

6.1 Bestimmen Sie jeweils die Art und die Koordinaten aller Extrempunkte von G_g und geben Sie die Wertemenge W_g von g an. ☒

6.2 Zeichnen Sie den Graphen G_g unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für $0 \leq x \leq 7$ in ein Koordinatensystem. ☐
Maßstab für die x-Achse: 1 LE = 1 cm, für die y-Achse: 1 LE = 2 cm

- 7 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion f vierten Grades. Die Funktion F bezeichne eine Stammfunktion von f .



Entscheiden Sie jeweils, ob folgende Aussagen wahr (w) oder Falsch (f) sind bzw. ob dies mit den gegebenen Informationen nicht entschieden (n) werden kann.

Kreuzen Sie entsprechend an.

Hinweis: Jedes richtig gesetzte Kreuz ergibt +1 BE, jedes falsch gesetzte -1 BE und jedes nicht gesetzte Kreuz 0 BE. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE bewertet.

(Abitur 2024 Teil 1)

Aussage	w	f	n
G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.			
G_f besitzt genau zwei Wendepunkte.			
G_f besitzt einen globalen Tiefpunkt.			
F hat genau vier Nullstellen.			
Für $x \rightarrow -\infty$ gilt: $f(x) \rightarrow \infty$			

Lösungen:

- 1a) Extrempunkte: Randtiefpunkt $T_1(-2/0)$, absoluter Hochpunkt $H_1(-1/5,5)$, absoluter Tiefpunkt $T_2(2/-8)$, Randhochpunkt $H_2(3/-2,5)$
- 1b) Extrempunkte: Randhochpunkt $H_1(-3/-5)$, absoluter Tiefpunkt $T(-2/-7)$, absoluter Hochpunkt $H_2(2/3)$
- 1c) Extrempunkte: absoluter Randtiefpunkt $T_1(-3/-3,75)$, relativer Hochpunkt $H_1(-2,2/1)$, relativer Tiefpunkt $T_2(0/-3)$, absoluter Hochpunkt $H_2(3/7)$, Randtiefpunkt $T_3(4/0,8)$

2.1

Aussage ist richtig.

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1)$$

$$\text{Scheitel: } x_s = -\frac{-6}{2} = 3 \quad y_s = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 4$$

$$\text{Nullstellen: } x_1 = 1 \quad x_2 = 5$$

2.2

Aussage ist richtig.

$$f'(x) = x^2 + 4x + 5 \Rightarrow x^2 + 4x + 5 = 0 \quad (f) \text{ keine Nullstellen}$$

Skizze von f' :

$\Rightarrow G_f$ ist sms in $[-3;5]$ und an den Rändern treten Randextrempunkte auf.

2.3

Aussage ist falsch.

G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, weil nur geradzahlige Exponenten auftreten.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \quad 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 1$$

Skizze von f' :

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ HOP } \text{HOP}(0/1)$$

$$x_2 = -1 \text{ TIP } \text{TIP}(-1/0)$$

$$x_3 = 1 \text{ TIP } \text{TIP}(1/0)$$

$\Rightarrow$ absolute Tiefpunkte bei $x = \pm 1$

$\Rightarrow$ Wertemenge $W = [0; \infty[$

2.4

Aussage ist richtig.

$$f'(x) = -3x^2 + 12x \quad -3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow -3x(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 4$$

Skizze von f' :

$$\Rightarrow G_f \text{ in } [0;4] \text{ sms}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ absoluter Tiefpunkt} \quad x_2 = 4 \text{ absoluter Hochpunkt}$$

$$f''(x) = -6x + 12 \quad -6x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Skizze von f'' :

$$\Rightarrow x = 2 \text{ WP}$$

3.1

$$g'(x) = -x^2 - \frac{8}{3}x \Rightarrow -x^2 - \frac{8}{3}x = 0 \Rightarrow x \left(-x - \frac{8}{3} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{8}{3}$$

Skizze von g' :

$$\Rightarrow x = -\frac{8}{3} \text{ TIP} \quad \text{TIP} \left(-\frac{8}{3} / -\frac{256}{81} \right) \quad x = 0 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(0/0)$$

$$x = -4,5 \text{ Randmaximum} \quad (-4,5 / 3,375)$$

$$x = 1 \text{ Randminimum} \quad \left(1 / -\frac{5}{3} \right)$$

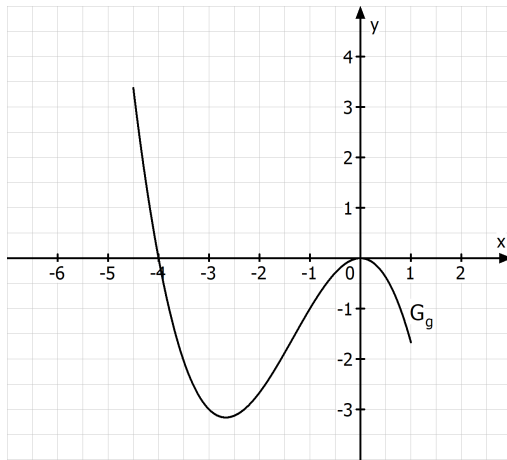
$$\Rightarrow W_g = \left[-\frac{256}{81}; 3,375 \right]$$

$$g''(x) = -2x - \frac{8}{3} \quad -2x - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

3.2 $x = -\frac{4}{3}$ ist eine einfache Nullstelle von $g'' \Rightarrow \text{VZW} \Rightarrow \text{WP}$

$$\text{WP} \left(-\frac{4}{3} / -\frac{128}{81} \right)$$

$$3.3 \quad -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 \cdot (x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -4$$



4.1 Da die Definitionsmenge nicht achsensymmetrisch zur y-Achse ist, ist G_f nicht achsensymmetrisch zur y-Achse, d.h. die Aussage ist falsch.

4.2

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 20x^2 + 64 = 0$$

Substitution: $z = x^2$

$$\Rightarrow z^2 - 20z + 64 = 0 \Rightarrow (z-16)(z-4) = 0 \Rightarrow z_1 = 16 \quad z_2 = 4$$

$$\Rightarrow 1) \quad x^2 = 16 \quad x_1 = -4 \quad x_2 = 4$$

$$2) \quad x^2 = 4 \quad x_3 = -2 \quad x_4 = 2$$

$\Rightarrow f$ hat drei Nullstellen bei $x_1 = 4$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 2$

4.3

$$f'(x) = \frac{1}{12}(4x^3 - 40x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 40x = 0 \Rightarrow x(4x^2 - 40) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad 4x^2 - 40 = 0 \Rightarrow x^2 = 10$$

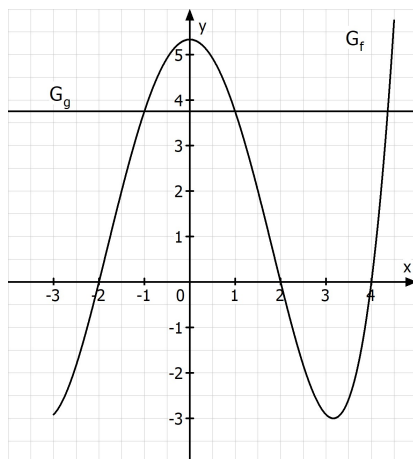
$$\Rightarrow (x_2 = -\sqrt{10} \approx -3,16) \notin D_f \quad x_2 = \sqrt{10} \approx 3,16$$

Skizze von f' :

$$\Rightarrow x = 3,16 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(3,16 | -3)$$

$$x = -3 \text{ Randminimum} \quad \text{RMin}(-3 | 2,92) \quad x = 4,5 \text{ Randmaximum} \quad \text{RMax}(4,5 | 5,76)$$

$$\Rightarrow W_f = [-3; 5,76]$$

4.4

5.1

$$g(-x) = -\frac{1}{4}(-x)^4 + 2(-x)^2 = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 = g(x) \quad \text{Definitionsmenge ist symmetrisch}$$

$\Rightarrow G_g$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

5.2

$$g'(x) = -x^3 + 4x \Rightarrow -x^3 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x^2 + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_2 = -2 \quad x_3 = 2$$

Skizze von g' :

$\Rightarrow$ Extremstellen bei $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 2$

Randextremstellen: $x = -3$ und $x = 3$

6.1

$$g'(x) = -0,025(3x^2 - 24x + 36)$$

$$-0,025(3x^2 - 24x + 36) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 24x + 36 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 4 \cdot 3 \cdot 36}}{6} = \frac{24 \pm \sqrt{144}}{6} = \frac{24 \pm 12}{6} \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 6$$

Skizze von g' :

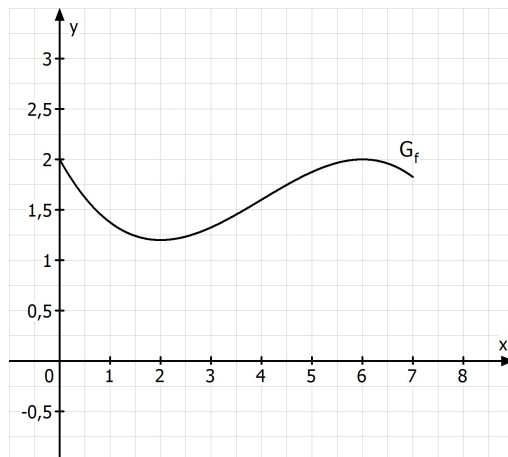
$\Rightarrow x = 2$ TIP TIP(2|1,2) $x = 6$ HOP HOP(6|2)

Betrachtung der Randwerte: $x = 0$ Randmax (0|2) $x = 7$ Randmin (7|1,825)

Absoluter Tiefpunkt bei $x = 2$; absoluter Hochpunkt bei $x = 0$ und $x = 6$

$$\Rightarrow W_g = [1,2;2]$$

6.2



7

Aussage	w	f	n
G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.		X	
G_f besitzt genau zwei Wendepunkte.	X		
G_f besitzt einen globalen Tiefpunkt.	X		
F hat genau vier Nullstellen.			X
Für $x \rightarrow -\infty$ gilt: $f(x) \rightarrow \infty$	X		